

ЗАДАЧА О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СЛОЕ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ (I. ТЕ-ВОЛНЫ)¹

Аннотация. Рассматривается краевая задача для системы уравнений Максвелла, описывающая распространение электромагнитных ТЕ-волн в нелинейном диэлектрическом слое с произвольной нелинейностью. Проблема приводит к нелинейной краевой задаче на собственные значения для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка. Получено дисперсионное уравнение для собственных значений задачи (постоянных распространения).

Ключевые слова: уравнения Максвелла, задача дифракции, нелинейная краевая задача на собственные значения.

Abstract. Electromagnetic propagation problem of TE-waves in a layer with arbitrary nonlinearity is considered. It was shown that the boundary value problem for Maxwell equations is reduced to a nonlinear boundary eigenvalue problem for an ordinary nonlinear differential equation of the 2nd order. Dispersion equation for the eigenvalues of the problem (propagation's constants) is obtained.

Keywords: Maxwell equation, diffraction problem, nonlinear boundary eigenvalue problem.

Введение

Одна из первых известных автору публикаций по распространению электромагнитных волн в нелинейных волноведущих структурах, в которой задачи распространения волн рассматриваются в строгой электродинамической постановке, – это работа [1], вышедшая в 1972 г. По крайней мере, с этого времени (см., например [2, 3]) проблемы нелинейной оптики и, в частности, проблемы распространения волн в нелинейных волноведущих структурах вызывают неослабевающий интерес. Однако если задачи распространения электромагнитных волн в нелинейных волноведущих структурах рассматривать в строгой электродинамической постановке, то они приводят к нелинейным краевым задачам на собственные значения, для которых на настоящий момент не существует общих методов решения. И даже в случае конкретных проблем решению они поддаются с большим трудом. Например, в работе [4] получено дисперсионное уравнение для собственных значений в случае распространения ТЕ-волн в волноводе с керровской нелинейностью при достаточно малом коэффициенте нелинейности. Однако дисперсионного уравнения для случая произвольного коэффициента до сих пор не получено, несмотря на то, что в течение всего этого периода появлялись публикации по этой проблематике (см. [4]). Эта задача была поставлена еще в работе [1], а ведь с момента ее публикации прошло более 30-ти лет. В то же время это одна из простейших задач для нелинейного волновода. Задача еще более усложняется, если рассматривается распространение ТМ-волн. В этом случае

¹ Работа выполнена при поддержке гранта Минобрнауки РФ по ФЦП «Развитие потенциала высшей школы» № 2.1.1/1647.

также удалось получить дисперсионное уравнение для достаточно малых значений коэффициента нелинейности. Автору неизвестны какие-либо строгие математические результаты относительно разрешимости краевых задач для электромагнитных волн, распространяющихся в цилиндрических волноводах с более сложными нелинейностями. К этим задачам тесно примыкают задачи распространения электромагнитных волн в нелинейном слое. Фактически это более простые задачи. Но даже такая задача в случае керровской нелинейности и ТМ-волн долгое время не поддавалась решению и была решена лишь недавно (см. [5, 6]). Для решения задачи использовался подход, разработанный в [5, 6]. Сейчас оказалось, что, используя этот метод, можно рассматривать большинство задач распространения электромагнитных волн в нелинейных слоях с единой точки зрения. Применению этого метода для случая распространения ТЕ-волн в слое с произвольной нелинейностью и посвящена настоящая работа. Задача для ТЕ-волн в слое с керровской нелинейностью была решена в работе [7], однако там использовалась существенно иная техника. Фактически там было построено в явном виде решение получающегося уравнения (в эллиптических функциях), что вообще удается сделать редко.

Исследование таких математических моделей важно, поскольку уже довольно давно [2, 3] известны вещества, в которых наблюдаются нелинейные эффекты третьего и четвертого порядков. Ясно, что с возрастанием мощности излучения (например, лазеров) становятся доступными для экспериментального изучения эффекты все более высоких порядков. С некоторыми новыми результатами и достижениями в различных отраслях нелинейной оптики можно ознакомиться по работам [8–10].

1. Задача дифракции и уравнения Максвелла

Рассмотрим электромагнитные волны, проходящие через однородный, изотропный, немагнитный диэлектрический слой с нелинейностью произвольного типа, расположенный между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$ в декартовой системе координат $Oxyz$. Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_0$ и $\varepsilon_3 \geq \varepsilon_0$ соответственно, где ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума. Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$, где μ_0 – магнитная проницаемость вакуума.

Электрическое поле гармонически зависит от времени t и удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon \mathbf{E}; \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H}, \quad (1)$$

где $\mathbf{E}(x, y, z)$ и $\mathbf{H}(x, y, z)$ – комплексные амплитуды [1].

Диэлектрическая проницаемость внутри слоя описывается следующим законом:

$$\varepsilon = \varepsilon_2 + \varepsilon_0 f(|E|^2),$$

где $f \in C[0, h]$ – произвольная функция (некоторые возможные ограничения на функцию f будут указаны далее); $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ – положительные константы. Будем искать решение уравнений Максвелла во всем пространстве.

Электромагнитное поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ удовлетворяет уравнениям Максвелла (1), условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границе раздела сред $x=0$, $x=h$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле экспоненциально затухает при $|x| \rightarrow \infty$ в областях $x < 0$ и $x > h$.

Рассмотрим ТЕ-поляризованные волны $\mathbf{E} = (0, E_y, 0)^T$, $\mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)^T$, где $(\cdot)^T$ – операция транспонирования. Предполагая, что компоненты поля гармонически зависят от z , $H_y = H_y(x)e^{i\gamma z}$, $E_x = E_x(x)e^{i\gamma z}$, $E_z = E_z(x)e^{i\gamma z}$, из (1) получаем систему уравнений [1, 5, 6]

$$\begin{cases} i\gamma H_x(x) - H'_z(x) = -i\omega\epsilon E_y(x), \\ -i\gamma E_y(x) = i\omega\mu H_x(x), \\ E'_y(x) = i\omega\mu H_z(x), \end{cases} \quad (2)$$

где γ – неизвестный спектральный параметр – постоянная распространения электромагнитной волны.

После простейших преобразований из системы (2) получаем

$$\gamma^2 E_y(x) - E''_y(x) = \omega^2 \mu \epsilon E_y(x).$$

Введем обозначения $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, и выполним нормировку в соответствии с формулами $\tilde{x} = kx$, $\frac{d}{dx} = k \frac{d}{d\tilde{x}}$, $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{k}$, $\tilde{\epsilon}_j = \frac{\epsilon_j}{\epsilon_0}$ ($j = 1, 2, 3$). Получаем из последнего уравнения

$$\tilde{\gamma}^2 E_y(\tilde{x}) - E''_y(\tilde{x}) = \tilde{\epsilon} E_y(\tilde{x}).$$

Обозначая $E_y(\tilde{x}) \equiv Y(\tilde{x})$ и опуская значок тильды, получаем

$$Y''(x) = \gamma^2 Y(x) - \epsilon Y(x). \quad (3)$$

Будем искать действительные решения $Y(x)$ для уравнения (3), полагая γ действительным (так что $|\mathbf{E}|^2$ не зависит от z) и считая

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_1, & x < 0, \\ \epsilon_2 + f(Y^2), & 0 < x < h, \\ \epsilon_3, & x > h. \end{cases} \quad (4)$$

Также будем полагать, что функция $Y(x)$ дифференцируема в слое так, что $Y(x) \in C(-\infty; +\infty) \cap C^2(-\infty; 0) \cap C^2(0; h) \cap C^2(h; +\infty)$.

Будем искать такие γ , что $\max(\epsilon_1, \epsilon_3) < \gamma^2 < \epsilon_2$.

2. Решение системы дифференциальных уравнений

Для $\varepsilon = \varepsilon_1$ в полупространстве $x < 0$ из (3) и (4) получаем уравнение $Y'' = (\gamma^2 - \varepsilon_1)Y$, его общее решение $Y(x) = A_1 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}x} + A e^{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}x}$, в силу условия на бесконечности получаем

$$Y(x) = A \exp\left(x\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}\right). \quad (5)$$

Для $\varepsilon = \varepsilon_3$ в полупространстве $x > h$ из (3) и (4) получаем уравнение $Y'' = (\gamma^2 - \varepsilon_3)Y$, его общее решение $Y(x) = B_1 e^{(x-h)\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}} + B e^{-(x-h)\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}$, в силу условия на бесконечности получаем

$$Y(x) = B \exp\left(-(x-h)\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}\right). \quad (6)$$

Постоянные A и B в (5) и (6) будут определяться граничными условиями. Внутри слоя $0 < x < h$ система (3) принимает вид

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} = (\gamma^2 - \varepsilon_2 - f(Y^2))Y. \quad (7)$$

Будем рассматривать последнее уравнение как систему, пусть $Y'(x) \equiv Z(x)$, получаем

$$\begin{cases} Z'(x) = (\gamma^2 - \varepsilon_2 - f(Y^2))Y(x), \\ Y'(x) = Z(x). \end{cases} \quad (8)$$

Для системы (8) можно получить первый интеграл и, таким образом, свести изучение уравнения второго порядка (7) к изучению уравнения первого порядка и первого интеграла, получающихся из системы (8). Найдем первый интеграл. Поделим одно уравнение на другое, получим уравнение

$$\frac{dZ}{dY} = \frac{\gamma^2 - \varepsilon_2 - f(Y^2)}{Z} Y, \text{ далее, } ZdZ + (\varepsilon_2 - \gamma^2 + f(Y^2))YdY = 0. \text{ Последнее}$$

уравнение, очевидно, является уравнением в полных дифференциалах. Пусть $F(Y, Z)$ – его решение, тогда $F'_z(Y, Z) = Z$, далее получаем

$$F(Y, Z) = \frac{Z^2}{2} + \frac{\varphi(Y^2)}{2}. \text{ Отсюда } \frac{1}{2}\varphi'(Y^2) = \frac{d\varphi(Y^2)}{d(Y^2)}Y \text{ и } \frac{d\varphi(Y^2)}{d(Y^2)} = \varepsilon_2 - \gamma^2 + f(Y^2), \text{ тогда}$$

$$\varphi(Y^2) = \int_{Y_0}^{Y^2} (\varepsilon_2 - \gamma^2 + f(u)) du.$$

Первый интеграл $F(Y, Z)$ принимает вид

$$Z^2 + \varphi(Y^2) = C, \quad (9)$$

где C – постоянная интегрирования.

Введем новые переменные:

$$\tau(x) = \varepsilon_2 + Y^2(x), \quad \eta(x) = \frac{Y(x)}{Z(x)} \tau(x), \quad (10)$$

из них имеем

$$YZ = (\tau - \varepsilon_2) \tau / \eta \quad \text{и} \quad Z^2 = (\tau - \varepsilon_2) \tau^2 / \eta^2. \quad (11)$$

Перейдем в системе (8) к новым переменным, последовательно получаем (мы ввели обозначение $\tau_0 \equiv \varepsilon_2 / \gamma^2$)

$$\begin{cases} (Z^2)' = 2(\gamma^2 - \varepsilon_2 - f(Y^2))YZ, \\ (\varepsilon_2 + Y^2)' = 2YZ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\tau^2}{\eta^2} \tau' + 2 \frac{(\tau - \varepsilon_2) \tau}{\eta^2} \tau' - 2 \frac{(\tau - \varepsilon_2) \tau^2}{\eta^3} \eta' = 2\gamma^2 \left(1 - \tau_0 - \frac{f(\tau - \varepsilon_2)}{\gamma^2} \right) (\tau - \varepsilon_2) \frac{\tau}{\eta}, \\ \tau' = 2(\tau - \varepsilon_2) \frac{\tau}{\eta}. \end{cases}$$

Окончательно получаем

$$\begin{cases} \tau' = 2(\tau - \varepsilon_2) \frac{\tau}{\eta}, \\ \eta' = \gamma^2 \left(\tau_0 - 1 + \frac{f(\tau)}{\gamma^2} \right) \frac{\eta^2}{\tau} + 3\tau - 2\varepsilon_2. \end{cases} \quad (12)$$

Первый интеграл (9) в новых переменных примет вид

$$\frac{(\tau - \varepsilon_2) \tau^2}{\eta^2} + \varphi(\tau - \varepsilon_2) = C. \quad (13)$$

Уравнение (13), вообще говоря, есть трансцендентное уравнение относительно τ . Его решение $\tau = \tau(\eta)$ легко может быть выписано явно лишь в исключительных случаях.

Однако если считать (и так можно делать в силу физического характера нелинейности), что функция f , выражающая нелинейность в слое, является многочленом относительно напряженности электрического поля, то уравнение (13) есть алгебраическое уравнение относительно τ . Вектор поляризации в материальных уравнениях в системе Максвелла имеет разложение в ряд по

степеням $|\mathbf{E}|$; считая, что нелинейность выражается в виде многочлена, мы просто обрываем соответствующий ряд. Однако можно подбирать и другие функции нелинейности, но так, чтобы выполнялись некоторые условия (они будут приведены далее).

3. Граничные условия и дисперсионное уравнение

Для того чтобы выписать дисперсионное уравнение для постоянных распространения электромагнитных волн, необходимо найти значения $\eta(0)$, $\eta(h)$.

Из непрерывности касательных составляющих полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ получаем

$$E_y(h+0) = E_y(h-0) = E_y^{(h)} \equiv Y(h); \quad E_y(0-0) = E_y(0+0) = E_y^{(0)} \equiv Y(0);$$

$$H_z(h+0) = H_z(h-0); \quad H_z(0-0) = H_z(0+0);$$

$$Y'(h) = i\omega\mu H_z(h+0) = H_z^{(h)} = Z(h); \quad Y'(0) = i\omega\mu H_z(0-0) = H_z^{(0)} = Z(0).$$

где постоянная $E_z^{(h)}$ считается известной.

Отсюда мы получаем, что $B = E_y^{(h)}$, $A = E_y^{(0)}$, $Y'(h) = -\sqrt{\gamma^2 - \epsilon_3} B = -H_z^{(h)}$, $Y'(0) = \sqrt{\gamma^2 - \epsilon_1} A = H_z^{(0)}$. И окончательно, $H_z^{(h)} = -\sqrt{\gamma^2 - \epsilon_3} E_y^{(h)}$ и $H_z^{(0)} = \sqrt{\gamma^2 - \epsilon_1} E_y^{(0)}$.

Из всего вышесказанного получаем искомые выражения в виде

$$\begin{aligned} \tau(0) &= \epsilon_2 + \left(E_y^{(0)}\right)^2, \quad \tau(h) = \left(E_y^{(h)}\right)^2 + \epsilon_2; \\ \eta(0) &= \frac{\left(E_y^{(0)}\right)^2 + \epsilon_2}{\sqrt{\gamma^2 - \epsilon_1}} > 0, \quad \eta(h) = -\frac{\left(E_y^{(h)}\right)^2 + \epsilon_2}{\sqrt{\gamma^2 - \epsilon_3}} < 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Из первого интеграла в форме (13) находим значение постоянной C при $x = h$:

$$C = \left(E_y^{(h)}\right)^2 (\gamma^2 - \epsilon_3) + \varphi\left(\left(E_y^{(h)}\right)^2\right). \quad (15)$$

Теперь из первого интеграла (13), используя (15), мы можем найти уравнение для $\tau(0)$:

$$\frac{(\tau(0) - \epsilon_2)\tau^2(0)}{\eta^2(0)} + \varphi(\tau(0) - \epsilon_2) = \left(E_y^{(h)}\right)^2 (\gamma^2 - \epsilon_3) + \varphi\left(\left(E_y^{(h)}\right)^2\right),$$

поскольку значение $\eta(0)$ мы можем выразить через $\tau(0)$ (см. формулы (14)), то из последнего уравнения получаем окончательно

$$(\tau(0) - \varepsilon_2)(\gamma^2 - \varepsilon_1) + \varphi(\tau(0) - \varepsilon_2) = \left(E_y^{(h)}\right)^2 (\gamma^2 - \varepsilon_3) + \varphi\left(\left(E_y^{(h)}\right)^2\right). \quad (16)$$

$$\text{Формально из (16) получаем } \tau(0) = G\left(\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_2, \gamma^2, \left(E_y^{(h)}\right)^2\right).$$

Ясно, что должно быть $\tau(0) \geq \varepsilon_2$, поскольку $\tau(0) \equiv \varepsilon_2 + Y^2(0) \geq 0$. При некоторых условиях на функцию φ корень $\tau(0) \geq \varepsilon_2$ существует. Например, если $\varphi(x) \equiv a_{2n+2}x^{2n+2} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_2x^2 + a_0$ — многочлен с неотрицательными коэффициентами. Конечно, можно и по-другому выбирать функцию f так, чтобы функция φ обладала нужным свойством. Однако, по-видимому, многочлен в качестве f с положительными коэффициентами является одной из наиболее общих нелинейностей для обычных материалов.

Кроме того, мы считаем функцию f таковой, что величина $\left(\tau_0 - 1 + \frac{f(\tau)}{\gamma^2}\right) \geq 0$. Это заведомо справедливо, если в качестве f выступает многочлен с положительными коэффициентами.

Рассмотрим систему (12), правая часть второго уравнения при сделанных предположениях (относительно функции f) неотрицательна, это значит, что функция η — неубывающая, но из формул (14) видно, что $\eta(0) > 0$, а $\eta(h) < 0$. Из этого следует, что функция η необходимо имеет точку разрыва.

$$\text{Из первого интеграла (13) имеем } \eta^2 = \frac{(\tau - \varepsilon_2)\tau^2}{C - \varphi(\tau - \varepsilon_2)}.$$

Точками разрыва, очевидно, являются нули знаменателя последнего выражения. Причем в этих точках $\tau^* = \tau(x^*)$: $\eta^* = \pm\infty$. Естественно среди всех корней знаменателя рассматриваемого выражения выбирать только те τ^* , которые $\geq \varepsilon_2$.

Предположим, что имеется $(N+1)$ точка разрыва $x_0, \dots, x_N$ на промежутке $x \in (0, h)$. Как видно, мы не связываем себя какими-то конкретными ограничениями на количество нулей знаменателя, таким образом, высказанное предположение является достаточно общим. Позднее будет видно, что N — конечное число.

Из свойств функции $\eta = \eta(x)$ следует, что

$$\eta(x_0 - 0) = \dots = \eta(x_N - 0) = +\infty, \quad \eta(x_0 + 0) = \dots = \eta(x_N + 0) = -\infty. \quad (17)$$

$$\text{Введем обозначение } \omega = \omega(\eta) \equiv \left[\gamma^2 \left(\tau_0 - 1 + \frac{f(\tau)}{\gamma^2} \right) \frac{\eta^2}{\tau} + 3\tau - 2\varepsilon_2 \right]^{-1}, \text{ здесь}$$

мы подразумеваем, что $\tau = \tau(\eta)$, которое можно получить из первого интеграла (13). Будем искать решение на каждом отрезке $[0, x_0]$, $[x_0, x_1]$, ..., $[x_N, h]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta(x_0) \\ - \int_{\eta(x)}^{\eta(x_0)} \omega d\eta = x + c_0, \quad 0 \leq x \leq x_0; \\ \eta(x) \\ \int_{\eta(x_i)}^{\eta(x)} \omega d\eta = x + c_i, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad i = \overline{0, N-1}; \\ \eta(x_i) \\ \eta(x) \\ \int_{\eta(x_N)}^{\eta(x)} \omega d\eta = x + c_N, \quad x_N \leq x \leq h. \end{array} \right. \quad (18)$$

Из уравнений (18), учитывая (17), подставляя $x = 0$, $x = x_{i+1}$, $x = x_N$, найдем необходимые константы $c_1, c_2, \dots, c_{N+1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = - \int_{\eta(0)}^{+\infty} \omega d\eta; \\ c_{i+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega d\eta - x_{i+1}, \quad i = \overline{0, N-1}; \\ c_{N+1} = \int_{-\infty}^{\eta(h)} \omega d\eta - h. \end{array} \right. \quad (19)$$

С учетом (19) уравнения (18) примут вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta(x_0) \\ \int_{\eta(x)}^{\eta(x_0)} \omega d\eta = -x + \int_{\eta(0)}^{+\infty} \omega d\eta, \quad 0 \leq x \leq x_0; \\ \eta(x) \\ \int_{\eta(x_i)}^{\eta(x)} \omega d\eta = x + \int_{-\infty}^{+\infty} \omega d\eta - x_{i+1}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad i = \overline{0, N-1}; \\ \eta(x_i) \\ \eta(x) \\ \int_{\eta(x_N)}^{\eta(x)} \omega d\eta = x + \int_{-\infty}^{\eta(h)} \omega d\eta - h, \quad x_N \leq x \leq h. \end{array} \right. \quad (20)$$

Введем обозначение $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega d\eta = T$. Из формулы (20) следует, что

$x_{i+1} - x_i = T > 0$. Отсюда получается, что число точек, в которых функция η обращается в бесконечность, конечно на интервале $(0, h)$. То что $T > 0$, можно усмотреть из следующего рассуждения. Поскольку интеграл берется от ограниченной неотрицательной функции и не обращающейся тождественно в нуль (это следует из того, что ни $\tau \not\equiv 0$, ни $Z \not\equiv 0$ при $x \in (0, h)$), он не мо-

жет равняться нулю. Теперь, полагая в уравнениях (20) x таковым, чтобы все интегралы слева обратились в нуль (т.е. $x = x_0$, $x = x_i$, $x = x_N$), сложим все уравнения (20), получим

$$0 = -x_0 + \int_{\eta(0)}^{+\infty} \omega d\eta + x_0 + T - x_1 + \dots + x_{N-1} + T - x_N + x_N + \int_{-\infty}^{\eta(h)} \omega d\eta - h.$$

И окончательно получаем

$$\int_{-\infty}^{\eta(h)} \omega d\eta + \int_{\eta(0)}^{+\infty} \omega d\eta + NT = h \text{ или } \int_{\eta(0)}^{\eta(h)} \omega d\eta + (N+1)T = h. \quad (21)$$

Формула (21) и есть дисперсионное уравнение, справедливое для любого конечного h .

Список литературы

1. **Eleonskii, P. N.** Cylindrical Nonlinear Waveguides / P. N. Eleonskii, L. G. Ogan'es'yants, V. P. Silin // Soviet Physics JETP. – 1972. – V. 35. – № 1. – P. 44–47.
2. **Цернике, Ф.** Прикладная нелинейная оптика / Ф. Цернике, Дж. Мидвинтер. – М. : Мир, 1976.
3. **Шуберт, М.** Введение в нелинейную оптику : в 2-х т. / М. Шуберт, Б. Вильгельми. – М. : Мир, 1973.
4. **Смирнов, Ю. Г.** Распространение электромагнитных волн в цилиндрических волноводах, заполненных нелинейной средой / Ю. Г. Смирнов, С. Н. Куприянова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44. – № 10. – С. 1850–1860.
5. **Валовик, Д. В.** Расчет постоянных распространения ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Радиотехника и электроника. – 2008. – Т. 53. – № 8. – С. 934–940.
6. **Валовик, Д. В.** О распространении ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое с нелинейностью, выраженной законом Керра / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48. – № 12. – С. 2186–2194.
7. **Schurmann, H. W.** Reflection and transmission of a plane TE-wave at a lossless nonlinear dielectric film / H. W. Schurmann, V. S. Serov, Yu. V. Shestopalov // Physica D. – 2001. – № 158 (2001). – P. 197–215.
8. **Шен, И. Р.** Принципы нелинейной оптики / И. Р. Шен. – М. : Наука, 1989.
9. **Агравал, Г.** Нелинейная волоконная оптика / Г. Агравал. – М. : Мир, 1996.
10. **Boyd, R. W.** Nonlinear optics / R. W. Boyd. – USA. : Academic Press, 2003.

Валовик Дмитрий Викторович

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет

E-mail: dvalovik@mail.ru

Valovik Dmitry Viktorovich

Candidate of physico-mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University

УДК 517.958; 517.927.4

Валовик, Д. В.

Задача о распространении электромагнитных волн в слое с произвольной нелинейностью (I. ТЕ-волны) / Д. В. Валовик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 1 (13). – С. 18–27.